

### Abschätzung harmonischer Funktionen

Beweisen Sie folgende Variante der Abschätzungen für die Ableitungen einer harmonischen Funktion :

Ist  $u$  harmonisch in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ , dann gilt

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B)}$$

für jede abgeschlossene Kugel  $B = B_r(x_0) \subseteq G$  und jeden Multiindex  $\alpha$  der Ordnung  $k$ . Hierbei ist

$$\|u\|_{L^1(B)} := \int_B |u(x)| \, dx$$

die Norm von  $u$  im Raum  $L^1(B)$  und

$$C_0 := \frac{1}{\gamma_n}, \quad C_k := \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\gamma_n}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

wobei  $\gamma_n$  das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.